



**MODEL MATEMATIKA SEIRD (SUSCEPTIBLE, EXPOSED, INFECTED, RECOVERED, DAN DEATH) UNTUK PENYEBARAN PENYAKIT ISPA**

Oleh:

Yuni Yulida<sup>1)</sup> & Muhammad Ahsar Karim<sup>2)</sup>

<sup>1,2</sup>Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Lambung Mangkurat

Email: <sup>1</sup>y\_yulida@ulm.ac.id & <sup>2</sup>m\_ahsar@ulm.ac.id

**Abstract**

In the last few decades, the Upper Respiratory Tract Infection has become one of the three leading causes of death and disability in the world, both in developing countries and in developed countries. In Indonesia, the trend of this disease continues to increase throughout 2016 - 2019 and in children it has caused 1 - 4 children under five to die every hour. In this study, the spread of this disease was modeled mathematically by using the SEIRD Model (Susceptible, Exposed, Infected, Recovered, and Death). Then, the equilibrium points of the model are determined, stability analysis is performed, and the model solution is determined using the Runge Kutta Method.

**Keywords: SEIRD Model, Acute respiratory infection (ISPA), Equilibrium, Stability Analysis & Runge Kutta Method.**

**PENDAHULUAN**

Infeksi Saluran Pernafasan Akut (*Upper Respiratory Tract Infection*), yang biasa disingkat ISPA dikenal secara umum sebagai penyakit saluran pernafasan atas atau bawah, biasanya menular dan dapat menimbulkan berbagai spektrum penyakit mulai dari penyakit tanpa gejala (infeksi ringan) hingga penyakit yang parah dan mematikan, tergantung pada patogen penyebabnya, faktor lingkungan dan faktor penjamu. Secara khusus, ISPA didefinisikan sebagai penyakit saluran pernafasan akut yang disebabkan oleh agen infeksi yang ditularkan dari manusia ke manusia. Infeksi akut adalah infeksi saluran pernafasan yang berlangsung sampai 14 hari dan menyerang organ mulai dari hidung sampai gelembung paru, beserta organ-organ di sekitarnya seperti: sinus, ruang telinga tengah dan selaput paru. ISPA paling banyak diderita oleh anak-anak, baik di negara berkembang maupun di negara maju, yang dapat berakibat kecacatan sampai pada masa dewasa dan juga dapat menyebabkan kematian bayi dan balita yang cukup tinggi.

Badan Kesehatan Dunia (WHO) dalam (*Forum of International Respiratory Societies*, 2017) memaparkan bahwa selama beberapa

<http://ejurnal.binawakya.or.id/index.php/MBI>

**Open Journal Systems**

dekade, ISPA merupakan 1 dari 3 penyebab utama kematian dan kecacatan di antara anak-anak dan orang dewasa di dunia. Diperkirakan bahwa ISPA menyebabkan hampir 4 Juta kematian setiap tahun dan merupakan penyebab utama kematian pada anak di bawah 5 tahun. Penyakit ISPA menjadi penyebab kematian nomer tiga setelah kardiovaskuler dan ISPA. Di Indonesia, penyakit ini pada anak menyebabkan 1-4 balita yang meninggal setiap jamnya dan di sepanjang tahun 2016-2018, tren penyakit ini terus meningkat. Badan Nasional Penanggulangan Bencana (BNPB) mengatakan bahwa jumlah penderita ISPA di Indonesia mencapai 919.516 orang (CNN, 2019). Penderita tersebut tersebar di enam provinsi yakni Riau, Jambi, Sumatera Selatan, Kalimantan Barat, Kalimantan Tengah dan Kalimantan Selatan sejak Februari-September 2019.

Penyakit ISPA umumnya disebabkan oleh serangan langsung ke saluran pernafasan bagian atas melalui mata, mulut dan hidung. Penyebab ISPA adalah virus atau bakteri seperti *rhinovirus*, *coronavirus*, *parainfluenza*, *respiratory syncytial virus*, dan *adenovirus*. Infeksi virus tersebut berisiko pada penyakit pilek serta pneumonia, dimana pneumonia lebih tinggi terjadi pada bayi

**Vol.15 No.7 Februari 2021**



dan anak-anak. Penyakit ISPA dapat menular melalui kontak langsung atau tidak langsung dari benda yang telah dicemari virus dan bakteri penyebab ISPA. Walaupun penyebab utama dari penyakit ISPA adalah virus, tetapi faktor lingkungan seperti kabut asap turut berdampak penting bagi penyebaran penyakit ini. Kabut asap yang intens dapat melemahkan kemampuan paru dan saluran pernapasan untuk melawan infeksi virus sehingga meningkatkan risiko seseorang terkena ISPA, terutama anak-anak dan lansia.

Penyebaran penyakit ISPA dapat dimodelkan secara matematika, salah satunya adalah model epidemik. Model matematika epidemik berkaitan dengan dinamika pertumbuhan populasi yang umumnya dipengaruhi oleh penyebaran penyakit atau virus yang bersifat endemik. Dalam model matematika epidemik, suatu populasi penduduk yang terpapar penyakit ISPA dapat digolongkan ke dalam empat sub-populasi, yaitu: populasi rentan (*susceptible*), populasi terjangkit (*exposed*), populasi terinfeksi (*infected*), dan populasi sembuh (*recovered*). Hal ini mengarah pada prediksi jumlah dan distribusi kejadian penyakit ISPA pada populasi penduduk. Hasil pemodelan ini dapat memberikan informasi untuk perencanaan, pelaksanaan, evaluasi program pencegahan, pemberantasan dan pengobatan, pengendalian, serta menentukan prioritas antara program-program tersebut dalam penanganan penyakit ISPA.

Beberapa penelitian yang dijadikan dasar untuk mendukung pemodelan matematika endemik penyakit ISPA diantaranya dilakukan oleh: Yulida dkk. (2011), Palgunadi & Herlambang (2014), dan Karim dkk. (2020). Dalam penelitian Yulida dkk (2011) ditunjukkan analisa kestabilan global pada model epidemik SIRS dengan menggunakan fungsi Lyapunov. Sementara pada penelitian Palgunadi & Herlambang (2014) dibuat simulasi penyebaran penyakit ISPA pada balita di Kota Surakarta menggunakan *game of life*. Penelitian Yulida dkk. (2011) serta Palgunadi & Herlambang (2014) dapat dijadikan dasar pendukung dalam pembentukan model matematika epidemik

penyebaran penyakit ISPA. Sedangkan pada penelitian Karim dkk (2020) ditunjukkan bagaimana menentukan solusi pendekatan dari model dengan menggunakan metode Runge-Kutta.

Berdasarkan pemaparan di atas, pada penelitian ini dibentuk model matematika epidemik penyakit ISPA. Selanjutnya, ditentukan titik kesetimbangan (ekuilibrium) dan dilakukan analisis kestabilan dari model, kemudian ditentukan solusi model dengan menggunakan Metode Runge Kutta.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah studi literatur, dimulai dari pengamatan pada tingginya tingkat penyebaran penyakit ISPA di Indonesia, dan dilanjutkan dengan penelusuran teori pendukung dalam pemodelan matematika epidemiologi. Selanjutnya, dibentuk model matematika penyebaran penyakit ISPA dengan menggunakan persamaan diferensial. Dari model yang terbentuk, dilakukan analisis untuk menentukan titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, melalui proses linearisasi dengan menggunakan deret Taylor dan Matriks *Next Generation*. Analisis kestabilan model diberikan pada kedua jenis titik kesetimbangan yang diperoleh dengan menggunakan Matriks Jacobi dan kriteria Routh Hurwitz. Akhirnya, ditentukan solusi model dengan menggunakan Metode Runge Kutta.

Beberapa konsep dasar yang digunakan diberikan dalam definisi-definisi dan teorema-teorema berikut ini.

**Definisi 1.** Titik Kesetimbangan (Perko, 1991) & (Braun, 1993)

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu dalam bentuk  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , dengan

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ dan } f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Titik  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  disebut titik kesetimbangan (ekuilibrium) dari jika  $f(\hat{x}) = 0$ .



**Definisi 2.** Nilai Eigen dan Vektor Eigen (Anton, 1994)

Jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$ , maka vektor tak nol  $x$  pada  $\mathbb{R}^n$  disebut vektor eigen dari  $A$  jika  $Ax$  adalah suatu kelipatan skalar dari  $x$  sehingga  $Ax = \lambda x$ , untuk sembarang skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  disebut nilai eigen dari  $A$  dan  $x$  disebut sebagai vektor eigen dari  $A$  yang terkait dengan  $\lambda$ .

Untuk mencari nilai eigen dari matriks  $A$ , maka persamaan  $Ax = \lambda x$  dituliskan sebagai  $(A - \lambda I)x = 0$ , dengan  $I$  matriks identitas. Persamaan ini mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (1)$$

Persamaan (1) disebut persamaan karakteristik dari  $A$ .

**Definisi 3.** Bilangan Reproduksi Dasar (Driessche & Watmough, 2005)

Bilangan Reproduksi Dasar disimbolkan dengan  $R_0$  dan didefinisikan bentuknya dapat berupa salah satu dari tiga nilai yang mungkin, yaitu:

- (i)  $R_0 < 1$ : Penyakit akan hilang seiring waktu
- (ii)  $R_0 = 1$ : Penyakit akan menjadi endemik dan tetap pada skala yang besar hingga terjadi epidemik
- (iii)  $R_0 > 1$ : Akan ada epidemik dengan tingkat sangat tinggi yang berkaitan dengan kematian.

Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan melalui Metode *Matrix Next Generation* (Driessche, 2005).

Untuk analisis kestabilan model diperlukan perhitungan untuk menentukan nilai-nilai eigen dari matriks Jacobi di titik ekuilibrium. Kriteria Routh-Hurwitz dapat digunakan untuk menentukan semua akar polinomial yang memiliki bagian riil negatif.

**Definisi 4.** Kriteria Routh-Hurwitz, (Gantmacher, 2000)

Diberikan persamaan karakteristik:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2)$$

dengan  $a_n$  bilangan riil,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $a_n \neq 0$ , dan  $a_0 > 0$ . Persamaan (2) didefinisikan sebagai matriks persegi berukuran  $n \times n$ , yaitu:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

dan disebut Matriks Routh-Hurwitz. Deteminan tingkat ke- $n$  dari Persamaan (3) dinotasikan dengan  $\Delta_j$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , dan dituliskan:

$$\Delta_1 = |a_1|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Bagian riil dari akar-akar Persamaan (2) bernilai negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Routh-Hurwitz pada Persamaan (3) adalah positif, yaitu  $\Delta_j > 0$ ; untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**Teorema 1.** (Kestabilan Titik Keseimbangan (Bellomo & Freziosi, 1995))

Jika  $\lambda_i$  merupakan nilai eigen dari matriks Jacobian  $n \times n$  di titik kesetimbangan  $\hat{x}$  dan  $Re(\lambda_i)$  merupakan bagian riil dari  $\lambda_i$  maka:

- (i) Untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $Re(\lambda_1) < 0$  maka  $\hat{x}$  stabil asimtotik
- (ii) Jika terdapat  $Re(\lambda_i) > 0$  untuk suatu  $i$  maka  $\hat{x}$  tidak stabil.

### Model SIR Klasik

Tipe SIR pertama kali diperkenalkan oleh W.O. Kermack dan A.G. McKendrick pada tahun 1927 dan berperan penting dalam epidemiologi matematika. Model epidemi sebagian besar didasarkan pada pembagian populasi ke dalam kompartemen. Dalam model SIR ini, ada 3 kompartemen:

- (1) *Susceptible* (S): Individu yang tidak memiliki kekebalan tubuh terhadap wabah penyakit yang dapat menular, sehingga memungkinkan terinfeksi jika rentan.



- (2) *Infected* (I): Individu yang saat ini terinfeksi dan dapat menularkan infeksi jika berinteraksi kepada individu yang rentan.
- (3) *Recovered* (R): Individu yang kebal terhadap infeksi, akibatnya tidak mempengaruhi dinamika transmisi dengan cara apapun ketika mereka berinteraksi dengan individu lain.
- (3) Kelompok *Infected* (terinfeksi), yaitu jumlah individu yang terinfeksi penyakit ISPA, dengan jumlah populasi pada waktu  $t$  adalah  $I(t)$ . Pada kelompok ini individu dapat menularkan penyakit.
- (4) Kelompok *Recovered* (sembuh), yaitu jumlah individu yang sembuh dari penyakit ISPA, dengan jumlah populasi pada waktu  $t$  adalah  $R(t)$ . Pada kelompok ini individu memiliki kekebalan sementara.

### Metode Runge-Kutta

Metode yang digunakan pada tulisan ini adalah Metode Runge-Kutta (Karim dkk., 2020) yang menggunakan fungsi utama:

$$y_{i+1} = y_i + [a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n]h \quad (4)$$

dan fungsi-fungsi evaluasi  $k_i$ :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \\ k_3 &= f(t_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(t_i + p_{n-1}h, y_i + q_{(n-1)1}k_1h + \\ &\quad q_{(n-1)2}k_2h + \dots + \\ &\quad q_{(n-1)(n-1)}k_{(n-1)}h \end{aligned} \quad (5)$$

dengan  $a_j$ ,  $p_l$ , dan  $q_{lm}$  masing-masing adalah konstanta dimana  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  dan  $l, m = 1, 2, \dots, (n - 1)$ , serta  $h = t_{i+1} - t_i$ .

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Pembentukan Model Matematika Penyebaran Penyakit ISPA

Untuk mengamati perilaku dan membentuk model matematika penyebaran penyakit ISPA, populasi penduduk dibagi atas lima kelompok sebagai berikut:

- (1) Kelompok *Susceptible* (rentan), yaitu jumlah individu yang sehat atau rentan terhadap penyakit ISPA, dengan jumlah populasi pada waktu  $t$  adalah  $S(t)$ .
- (2) Kelompok *Exposed* (terekspos), yaitu jumlah individu yang menunjukkan gejala terkena penyakit ISPA dan sedang menjalani pemeriksaan, dengan jumlah populasi pada waktu  $t$  adalah  $E(t)$ . Pada kelompok ini, individu diasumsikan belum dapat menularkan penyakit ISPA.
- (3) Individu dari kelompok *Susceptible* yang terinfeksi penyakit ISPA dapat digolongkan ke dalam kelompok *Exposed*, apabila menunjukkan gejala terjangkit ISPA.
- (4) Individu dari kelompok *Exposed* dapat digolongkan ke kelompok *Susceptible* kembali karena kesembuhan secara alami.
- (5) Individu dari kelompok *Exposed* dapat digolongkan ke kelompok *Infected* jika individu tersebut menunjukkan gejala infeksi ISPA.
- (6) Individu pada kelompok *Infected* dapat menularkan penyakit ISPA.
- (7) Semua individu yang lahir diasumsikan masuk ke kelompok *Susceptible*.
- (8) Individu dari kelompok *Infected* dapat mengalami kematian karena ISPA maupun secara alami. Sedangkan individu dari kelompok *Eksposed* diasumsikan hanya mengalami kematian secara alami.

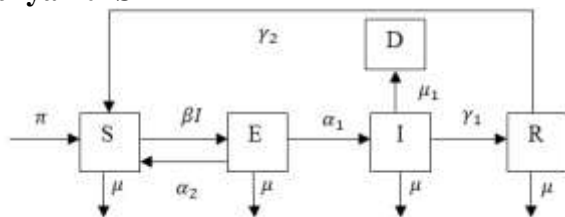




- (9) Individu dari kelompok *Infected* yang sembuh karena pengobatan digolongkan ke kelompok *Recovered*.
- (10) Individu dari kelompok *Recovered* diasumsikan memiliki kekebalan tubuh sementara dan dapat digolongkan kembali ke kelompok *Susceptible*.
- (11) Individu dari kelompok *Infected* dapat mengalami kematian karena ISPA, yang digolongkan ke kelompok *Death*.

Berdasarkan pengelompokan populasi dan asumsi-asumsi yang disusun, maka dapat digambarkan kompartemen penyebaran penyakit ISPA pada Gambar 1 berikut ini.

**Gambar 1. Kompartemen Model Penyebaran Penyakit ISPA**



Keterangan dari Gambar 1 diberikan sebagai berikut:

- $S(t)$  : jumlah individu rentan terhadap penyakit ISPA pada waktu  $t$ .
- $E(t)$  : jumlah individu terekspos penyakit ISPA pada waktu  $t$ .
- $I(t)$  : jumlah individu terinfeksi penyakit ISPA pada waktu  $t$ .
- $R(t)$  : jumlah individu sembuh dari penyakit ISPA dan memiliki kekebalan sementara pada waktu  $t$ .
- $D(t)$  : jumlah individu meninggal karena penyakit ISPA saat  $t$ .
- $\pi$  : jumlah individu yang baru akibat proses kelahiran.
- $\alpha_2$  : laju kesembuhan karena kekebalan alami dari kelompok *exposed*.
- $\gamma_2$  : laju penurunan kekebalan tubuh setelah sembuh dari penyakit ISPA.
- $\beta$  : Laju infeksi individu dari kelompok *susceptible* menjadi individu *exposed* (melakukan kontak dengan kelompok *Infected*).

- $\mu$  : Laju kematian alami.
- $\alpha_1$  : Laju infeksi/aktivasi bakteri ISPA pada individu dari kelompok *exposed* menjadi individu *infected*.
- $\gamma_1$  : Laju kesembuhan karena pengobatan.
- $\mu_1$  : Laju kematian karena penyakit ISPA.

Selanjutnya, berdasarkan pengelompokan populasi dan asumsi-asumsi yang disusun di atas, penyebaran penyakit ISPA dapat dijelaskan sebagai berikut:

1. Kelompok *Susceptible*

Laju perubahan jumlah individu pada kelompok *susceptible* terhadap waktu akan meningkat karena adanya jumlah individu baru akibat proses kelahiran sebesar  $\pi$ , adanya laju kesembuhan karena kekebalan alami dari kelompok *exposed* sebesar  $\alpha_2$ , dan adanya laju penurunan kekebalan tubuh setelah sembuh dari penyakit ISPA  $\gamma_2$ . Kemudian akan berkurang jika individu dari kelompok *susceptible* (melakukan kontak dengan kelompok *Infected*) menjadi individu *exposed* dengan laju infeksi sebesar  $\beta$  serta akan berkurang karena adanya kematian secara alami dengan laju kematian sebesar  $\mu$ . Jadi, Perubahan jumlah kelompok *susceptible* terhadap waktu dituliskan menjadi:

$$\frac{dS}{dt} = \pi - \beta SI + \alpha_2 E + \gamma_2 R - \mu S \quad (6)$$

2. Kelompok *Exposed*

Laju perubahan jumlah kelompok *exposed* terhadap waktu akan bertambah jika individu dari kelompok *susceptible* yang telah berinteraksi dengan kelompok *infected* dengan laju infeksi sebesar  $\beta$ . Kemudian akan berkurang ketika individu dari kelompok *exposed* menjadi individu *infected* dengan laju aktivasi bakteri ISPA sebesar  $\alpha_1$ , adanya laju kesembuhan karena kekebalan alami dari kelompok *exposed* sebesar  $\alpha_2$  dan mengalami kematian secara alami dengan laju sebesar  $\mu$ . Jadi, Perubahan jumlah kelompok *exposed* terhadap waktu dituliskan menjadi:

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\alpha_1 + \alpha_2 + \mu)E \quad (7)$$

3. Kelompok *Infected*



Laju perubahan jumlah kelompok *Infected* terhadap waktu akan bertambah jika individu dari kelompok *exposed* masuk menjadi kelompok *Infected* karena adanya laju aktivasi bakteri ISPA sebesar  $\alpha_1$ . Kemudian akan berkurang karena adanya laju kesembuhan karena pengobatan sebesar  $\gamma_1$  serta karena adanya kematian secara alami dengan laju  $\mu$  dan kematian disebabkan karena penyakit ISPA sebesar  $\mu_1$ . Jadi, Perubahan jumlah kelompok *infected* terhadap waktu dituliskan menjadi:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha_1 E - (\gamma_1 + \mu + \mu_1)I \quad (8)$$

#### 4. Kelompok *Recovered*

Laju perubahan jumlah kelompok *recovered* terhadap waktu akan bertambah jika individu kelompok *infected* sembuh dari penyakit dengan laju kesembuhan sebesar  $\gamma_1$  dan akan berkurang karena ada kematian secara alami dengan laju kematian alami sebesar  $\mu$ , dan adanya lalu penurunan kekebalan tubuh sebesar  $\gamma_2$ . Jadi, Perubahan jumlah kelompok *recovered* terhadap waktu dituliskan menjadi:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 I - (\gamma_2 + \mu)R \quad (9)$$

#### 5. Kelompok *Death*

Laju perubahan jumlah kelompok *death* terhadap waktu akan bertambah jika individu kelompok *infected* meninggal akibat penyakit ISPA dengan laju kematian sebesar  $\mu_1$ . Secara matematis dinyatakan sebagai:

$$\frac{dD}{dt} = \mu_1 I \quad (10)$$

Dari Persamaan (6)-(10) diperoleh Model Penyebaran Penyakit ISPA sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \pi - \beta SI + \alpha_2 E + \gamma_2 R - \mu S \quad (11)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\alpha_1 + \alpha_2 + \mu)E \quad (12)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha_1 E - (\gamma_1 + \mu + \mu_1)I \quad (13)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 I - (\gamma_2 + \mu)R \quad (14)$$

$$\frac{dD}{dt} = \mu_1 I \quad (15)$$

Sistem Persamaan (11)-(15) disebut Model SEIRD Penyebaran Penyakit ISPA.

Vol.15 No.7 Februari 2021

### Solusi Terbatas

Diberikan  $S(0), E(0), I(0), R(0) \geq 0$ , dengan masing-masing merupakan jumlah populasi awal setiap kelompok populasi. Dari Persamaan (11)-(15) dapat ditunjukkan bahwa  $S(t), E(t), I(t), R(t) > 0$ , untuk setiap  $t > 0$ .

**Lemma 1.** *Himpunan tertutup*

$$\Lambda = \left\{ (S, E, I, R, D) \in \mathbb{R}_+^5 : 0 \leq S + E + I + R + D \leq \frac{\pi}{\mu} \right\}$$

*merupakan invarian positif.*

**Bukti.** Dari Persamaan (11)-(15), jika masing-masing ruas dijumlahkan, maka diperoleh:

$$\frac{dN}{dt} = \pi - \mu N \quad (16)$$

dengan  $N = S + E + I + R + D$ .

Dari Persamaan (11) diperoleh solusi umum:

$$N(t) = \frac{\pi}{\mu} + C e^{-\mu t} \quad (17)$$

Jika diberikan jumlah total populasi awal sebesar  $N(0) = N_0$ , maka diperoleh

$$C = N_0 - \frac{\pi}{\mu} \quad (18)$$

Persamaan (18) disubstitusi ke Persamaan (17) dan diperoleh solusi khusus sebagai berikut:

$$N(t) = \frac{\pi}{\mu} + \left( N_0 - \frac{\pi}{\mu} \right) e^{-\mu t} \quad (19)$$

Selanjutnya, untuk  $t \rightarrow \infty$  diperoleh

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\pi}{\mu} \quad (20)$$

Untuk  $N(0) \leq \frac{\pi}{\mu}$ , diperoleh  $N(t) \leq \frac{\pi}{\mu}$  dan demikian juga untuk  $N(0) > \frac{\pi}{\mu}$ , tetap diperoleh  $N(t) \leq \frac{\pi}{\mu}$ , untuk setiap  $t > 0$ .

Dengan demikian,

$$(S(t), E(t), I(t), R(t), D(t)) \in \Lambda,$$

untuk setiap  $t > 0$ . Hal ini berarti bahwa  $\Lambda$  adalah invarian positif. ■

Selanjutnya, untuk menentukan titik ekuilibrium dan analisis kestabilan pada model, cukup digunakan Persamaan (11)-(14) saja, karena variabel  $D$  pada Persamaan (15) dapat ditentukan sebagai berikut:

$$D = N - (S + E + I + R) \quad (22)$$

Dengan demikian, analisis dinamik dari model ISPA dapat disederhanakan dengan hanya melibatkan empat variabel saja, yaitu:  $S, E, I, R$ .



### Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar

Titik ekuilibrium dari Persamaan (11)-(15) dapat ditentukan dengan menentukan solusi sistem berikut:

$$\begin{aligned} \pi - \beta SI + \alpha_2 E + \gamma_2 R - \mu S &= 0 \\ \beta SI - (\alpha_1 + \alpha_2 + \mu) E &= 0 \\ \alpha_1 E - (\gamma_1 + \mu + \mu_1) I &= 0 \\ \gamma_1 I - (\gamma_2 + \mu) R &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Dari Sistem Persamaan (22) diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit:

$$T_0 = (\hat{S}_0, \hat{E}_0, \hat{I}_0, \hat{R}_0) = \left( \frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0 \right) \quad (23)$$

dan titik ekuilibrium endemik:

$$T_1 = (S_1, E_1, I_1, R_1) \quad (24)$$

dengan:

$$S_1 = \frac{\pi}{\mu R_0},$$

$$E_1 = \frac{\pi(R_0-1)(\gamma_1+\mu+\mu_1)(\gamma_2+\mu)}{R_0((\gamma_1+\mu+\mu_1)(\gamma_2+\mu)(\alpha_1+\mu)-\alpha_1\gamma_1\gamma_2)},$$

$$I_1 = \frac{\pi(R_0-1)\alpha_1(\gamma_2+\mu)}{R_0((\gamma_1+\mu+\mu_1)(\gamma_2+\mu)(\alpha_1+\mu)-\alpha_1\gamma_1\gamma_2)},$$

$$R_1 = \frac{\pi(R_0-1)\alpha_1\gamma_1}{R_0((\gamma_1+\mu+\mu_1)(\gamma_2+\mu)(\alpha_1+\mu)-\alpha_1\gamma_1\gamma_2)}$$

$R_0$  pada Persamaan (24) menyatakan Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*), yang ditentukan dengan menggunakan Metode *Next Generation Matriks*, dengan persamaan sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\alpha_1 \beta \pi}{\mu(\alpha_1 + \alpha_2 + \mu)(\gamma_1 + \mu + \mu_1)} \quad (25)$$

### Analisa Kestabilan Model ISPA

Dari Persamaan (11)-(14) diperoleh Matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} \end{bmatrix} \quad (26)$$

dengan:  $j_{11} = -\mu - \beta I$ ,  $j_{12} = \alpha_2$ ,  $j_{13} = -\beta S$ ,  $j_{14} = \gamma_2$ ,  $j_{21} = \beta I$ ,  $j_{22} = -\alpha_1 - \alpha_2 - \mu$ ,  $j_{23} = \beta S$ ,  $j_{32} = \alpha_1$ ,  $j_{33} = -\gamma_1 - \mu - \mu_1$ ,  $j_{43} = \gamma_1$ ,  $j_{44} = -\gamma_2 - \mu$ , dan  $j_{24} = j_{31} = j_{34} = j_{41} = j_{42} = 0$ .

Selanjutnya, diberikan analisis kestabilan sebagai berikut.

1) Analisa Kestabilan di Sekitar Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit pada Persamaan (23) disubstitusi ke Persamaan (26) sehingga diperoleh suatu Matriks Jacobi  $J(T_0)$ , dengan persamaan karakteristik:

$$(\mu + \lambda)(\gamma_2 + \mu + \lambda)(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \quad (27)$$

dengan:

$$a = 1 > 0,$$

$$b = (\alpha_1 + \alpha_2 + \mu) + (\gamma_1 + \mu + \mu_1) > 0,$$

$$c = (\alpha_1 + \alpha_2 + \mu)(\gamma_1 + \mu + \mu_1)[1 - R_0].$$

Dari Persamaan (27) diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\mu < 0 \quad (28)$$

$$\lambda_2 = -(\gamma_2 + \mu) < 0 \quad (29)$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (30)$$

Nilai eigen  $\lambda_{3,4}$  pada Persamaan (30) dapat dianalisis sebagai berikut:

a) Nilai  $c > 0$  dengan syarat  $R_0 < 1$ .

i) Jika nilai  $c > 0$  dan  $b^2 > 4ac$ , maka

$$b > \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Akibatnya, nilai eigen  $\lambda_{3,4}$  bernilai riil negatif.

ii) Jika nilai  $c > 0$  dan  $b^2 < 4ac$ , maka  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  bernilai kompleks.

Akibatnya nilai eigen  $\lambda_{3,4}$  bernilai kompleks berpasangan dengan bagian riil bernilai negatif atau  $Re(\lambda_{3,4}) < 0$ .

iii) Jika nilai  $c > 0$  dan  $b^2 = 4ac$ , maka nilai eigen  $\lambda_{3,4} = \frac{-b}{2a}$  bernilai riil, kembar dan negatif.

b) Nilai  $c = 0$  dengan syarat  $R_0 = 1$ .

Jika nilai  $c = 0$ , maka nilai eigen  $\lambda_3 = 0$  dan  $\lambda_4 = \frac{-b}{a} < 0$ .

c) Nilai  $c < 0$  dengan syarat  $R_0 > 1$ .

Jika nilai  $c < 0$ , maka  $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ , sehingga  $b < \sqrt{b^2 - 4ac}$ . Akibatnya, nilai eigen  $\lambda_{3,4}$  bernilai riil dan berbeda tanda (positif dan negatif).

Berdasarkan hasil analisa tersebut, maka dapat diperoleh bahwa, jika  $R_0 < 1$  maka bagian riil dari semua nilai eigen bernilai negatif atau  $Re(\lambda_{3,4}) < 0$ . Akibatnya, berdasarkan Teorema



1, titik ekuilibrium bebas penyakit  $T_0 = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0\right)$  stabil asimtotik. Hal ini berarti bahwa jumlah populasi terinfeksi penyakit ISPA akan berkurang terus menerus seiring waktu, apabila  $R_0 < 1$ .

## 2) Analisa Kestabilan di Sekitar Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik pada Persamaan (25) disubstitusi ke Persamaan (26) sehingga diperoleh suatu Matriks Jacobi  $J(T_1)$ , dengan persamaan karakteristik:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (31)$$

dengan:

$$a_0 = 1 > 0,$$

$$a_1 = [(\mu + \beta I_1) + (\gamma_2 + \mu) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \mu) + (\gamma_1 + \mu + \mu_1)] > 0,$$

$$a_2 = (\mu + \beta I_1)(\gamma_2 + \mu) + (\mu + \beta I_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \mu) + (\gamma_2 + \mu)(\alpha_1 + \alpha_2 + \mu) + (\mu + \beta I_1)(\gamma_1 + \mu + \mu_1) + (\gamma_1 + \mu + \mu_1)(\gamma_2 + \mu) - \beta I_1 \alpha_2 > 0,$$

$$a_3 = (\mu + \beta I_1)(\gamma_2 + \mu)(\alpha_1 + \alpha_2 + \mu) + (\mu + \beta I_1)(\gamma_2 + \mu)(\gamma_1 + \mu + \mu_1) - \beta I_1 \alpha_2 (\gamma_1 + \mu + \mu_1) + \beta S_1 \beta I_1 \alpha_1 - \beta I_1 \alpha_2 (\gamma_2 + \mu),$$

$$a_4 = \beta S_1 \beta I_1 \alpha_1 (\gamma_2 + \mu) - (\beta I_1 \alpha_1) \gamma_1 \gamma_2 - \beta I_1 \alpha_2 (\gamma_1 + \mu + \mu_1) (\gamma_2 + \mu).$$

Pada Persamaan (31), nilai eigen  $\lambda$  memiliki bagian riil negatif jika memenuhi kriteria Routh Hurwitz (Definisi 4), dengan dua langkah sebagai berikut:

a) Pertama, dibentuk matriks Hurwitz:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

b) Kedua, membuktikan bahwa  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , dan  $\Delta_4$  dari Matriks  $H$  adalah positif.

$$(i) \Delta_1 = a_1 = [(\mu + \beta I_1) + (\gamma_2 + \mu) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \mu) + (\gamma_1 + \mu + \mu_1)].$$

Karena semua parameter bernilai positif dan memenuhi syarat  $R_0 > 1$ , maka  $\Delta_1 > 0$ .

$$(ii) \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 > 0,$$

karena semua parameter yang terlibat bernilai positif dan memenuhi syarat  $R_0 > 1$ .

$$(iii) \Delta_3 = a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 = a_3(\Delta_2) - a_1^2 a_4 > 0,$$

dengan syarat  $R_0 > 1$ .

$$(iv) \Delta_4 = a_4[a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4] = a_4 \Delta_3 > 0,$$

karena  $\Delta_3 > 0$  dan  $a_4 > 0$ , dengan syarat  $R_0 > 1$ .

Dengan demikian, diperoleh bahwa  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , dan  $\Delta_4$  bernilai positif dengan syarat  $R_0 > 1$ . Hal ini berarti bahwa nilai eigen pada Persamaan (31) memiliki bagian riil negatif atau  $Re(\lambda_i) < 0$ , untuk  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Berdasarkan Teorema 1 diketahui bahwa titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal jika  $R_0 > 1$ . Artinya, jumlah populasi terinfeksi penyakit ISPA masih akan terus bertambah seiring pertambahan waktu dengan rata-rata tingkat kasus infeksi sekunder  $R_0 > 1$ .

## Solusi Model SEIRD

Solusi eksak dari Model SEIRD pada Sistem Persamaan (11)-(15) memerlukan perhitungan yang kompleks atau bahkan tidak dapat ditentukan. Oleh karena itu, digunakan Metode Runge-Kutta untuk menentukan solusi pendekatan dari model tersebut. Selanjutnya, dengan menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat ( $j = 1, 2, 3, 4$  dan  $l, m = 1, 2, 3$ ) pada Persamaan (4) dan (5) dan memilih:

$$a_1 = a_4 = \frac{1}{6}, a_2 = a_3 = \frac{2}{6}, p_1 = p_2 = \frac{1}{2}, p_3 = 1,$$

$$q_{11} = q_{22} = \frac{1}{2}, q_{21} = q_{31} = q_{32} = 0, q_{33} = 1,$$

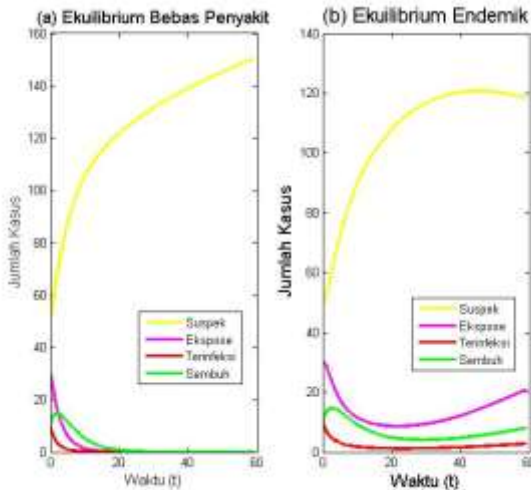
maka solusi Model SEIRD pada Sistem Persamaan (12)-(16) dapat diperoleh dalam dua kasus, yaitu ekuilibrium bebas penyakit dan ekuilibrium endemik.

Sebagai ilustrasi, diberikan grafik solusi Model SEIRD dengan nilai awal:  $S(0) = 50$ ,  $E(0) = 30$ ,  $I(0) = 10$ ,  $R(0) = 10$ , dan  $D(0) = 0$  pada Gambar 2 berikut ini.

## Gambar 2. Grafik solusi dari Model SEIRD pada Sistem Persamaan (6)-(10).

<http://ejurnal.binawakya.or.id/index.php/MBI>





Gambar 2 (a) menampilkan grafik solusi model untuk ekuilibrium bebas penyakit dengan menggunakan parameter:  $\pi = 3$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\gamma_2 = 0.2$ ,  $\beta = 0.02$ ,  $\mu = 1/60$ ,  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\gamma_1 = 0.9$ , dan  $\mu_1 = 0$ . Set parameter ini menghasilkan Bilangan Reproduksi Dasar  $R_0 = 0.6369$  dan titik ekuilibrium bebas penyakit:

$$T_0 = (180, 0, 0, 0).$$

Grafik menunjukkan bahwa jumlah populasi terinfeksi penyakit ISPA akan berkurang terus menerus seiring pertambahan waktu.

Pada Gambar 2 (b) menampilkan grafik solusi model untuk ekuilibrium endemik dengan menggunakan parameter:  $\pi = 3$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\gamma_2 = 0.2$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $\mu = 1/60$ ,  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\gamma_1 = 0.7$ , dan  $\mu_1 = 0$ . Set parameter ini menghasilkan Bilangan Reproduksi Dasar  $R_0 = 1.6292$  dan titik ekuilibrium endemik:

$$T_1 = (110.49, 1.27, 0.18, 19.71).$$

Grafik menunjukkan bahwa jumlah populasi terinfeksi penyakit ISPA masih akan terus bertambah seiring pertambahan waktu.

## PENUTUP

### Kesimpulan

Kesimpulan dari penelitian ini adalah:

1. Model matematika penyebaran penyakit ISPA yang diperoleh adalah Model SEIRD:

$$\frac{dS}{dt} = \pi - \beta SI + \alpha_2 E + \gamma_2 R - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\alpha_1 + \alpha_2 + \mu) E$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha_1 E - (\gamma_1 + \mu + \mu_1) I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 I - (\gamma_2 + \mu) R$$

$$\frac{dD}{dt} = \mu_1 I$$

2. Titik kesetimbangan (ekuilibrium) dari Model SEIRD tersebut adalah:

- a) Ekuilibrium bebas penyakit:

$$T_0 = (\hat{S}_0, \hat{E}_0, \hat{I}_0, \hat{R}_0) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0\right).$$

- b) Ekuilibrium endemik:

$$T_1 = (S_1, E_1, I_1, R_1)$$

dengan:

$$S_1 = \frac{\pi}{\mu R_0},$$

$$E_1 = \frac{\pi(R_0 - 1)(\gamma_1 + \mu + \mu_1)(\gamma_2 + \mu)}{R_0((\gamma_1 + \mu + \mu_1)(\gamma_2 + \mu)(\alpha_1 + \mu) - \alpha_1 \gamma_1 \gamma_2)},$$

$$I_1 = \frac{\pi(R_0 - 1)\alpha_1(\gamma_2 + \mu)}{R_0((\gamma_1 + \mu + \mu_1)(\gamma_2 + \mu)(\alpha_1 + \mu) - \alpha_1 \gamma_1 \gamma_2)},$$

$$R_1 = \frac{\pi(R_0 - 1)\alpha_1 \gamma_1}{R_0((\gamma_1 + \mu + \mu_1)(\gamma_2 + \mu)(\alpha_1 + \mu) - \alpha_1 \gamma_1 \gamma_2)}.$$

3. Jenis kestabilan dari titik kesetimbangan Model SEIRD tersebut adalah:

- a) Ekuilibrium bebas penyakit  $T_0$  adalah stabil asimtotik.

- b) Ekuilibrium endemik  $T_1$  adalah stabil asimtotik lokal, jika  $R_0 > 1$ .

4. Solusi dari Model SEIRD tersebut, dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde Empat, menunjukkan bahwa, untuk titik ekuilibrium bebas penyakit  $T_0$ , jumlah populasi terinfeksi penyakit ISPA akan berkurang terus menerus seiring pertambahan waktu, sedangkan untuk titik ekuilibrium endemik  $T_1$ , jumlah populasi terinfeksi penyakit ISPA akan terus bertambah seiring pertambahan waktu.

## Saran

Untuk penelitian selanjutnya, Model SEIRD pada penyebaran penyakit ISPA yang diperoleh dalam tulisan ini dapat digunakan untuk melakukan estimasi parameter dengan studi kasus pada suatu daerah/wilayah yang memiliki tingkat penyebaran penyakit ISPA yang tinggi. Bagi tim peneliti sendiri, hasil ini akan digunakan untuk estimasi parameter dan penaksiran kejadian penyebaran penyakit ISPA di Kota Banjarbaru, Kalimantan Selatan.


 .....  
**DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Anton, H. 1994. *Aljabar Linier Elementer*, Edisi kelima. Erlangga. Jakarta.
- [2] Bellomo, N. & L. Preziosi. 1995. *Modelling Mathematical Method and Scientific Computation*. CRC Press, Florida
- [3] Braun, M. 1992. *Differential Equation and Their Applications-Fourth Edition*. Springer-Verlag. New York.
- [4] CNN Indonesia. 2019. *Penderita ISPA Akibat Karhutla Tembus 919 Ribu Orang*. <https://www.cnnindonesia.com/nasional/20190923160933-20-433052/penderita-ispa-akibat-karhutla-tembus-919-ribu-orang>. Akses: 5 November 2019
- [5] Driessche, P & Watmough, J. 2005. Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Bioscience*. Math. Biosci. 177&178, 317-332.
- [6] Forum of International Respiratory Societies. 2017. *The Global Impact of Respiratory Disease - Second Edition*. Sheffi eld, European Respiratory Society. ISBN: 9781849840873; e-ISBN: 9781849840880.
- [7] Karim, M.A. and Gunawan, A.Y. (2020). Parameter Estimations of Fuzzy Forced Duffing Equation: Numerical Performances by the Extended Runge-Kutta Method. *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2020 (Article ID 6179591), 9 Pages.
- [8] Madsen, K. et.al. 2004. *Methods for Non-Linear Least Squares Problems 2nd Edition*. Informatics and Mathematical Modelling. Denmark.
- [9] Palgunadi, S. & Herlambang, T. 2014. Simulasi Penyebaran Penyakit ISPA Pada Balita di Kota Surakarta Menggunakan *Game of Life*. *Prosiding SNST ke-5 Fakultas Teknik Universitas Wahid Hasyim Semarang*.
- [10] Perko, L. 1991. *Differential Equation and Dynamical systems*. Text in Applied Mathematic vol 7. Springer-Verlag, New York, USA.
- [11] Yulida, Y., Faisal & Karim, M.A. 2011. *Analisis Kestabilan Global Model Epidemik SIRS Menggunakan Fungsi Lyapunov*. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan Epsilon*, Vol. 5 No. 2, Hal. 31-42, ISBN: 19784422.