



**ESTIMASI PARAMETER PADA PERSAMAAN OSILATOR HARMONIK FUZZY:
PERBANDINGAN SOLUSI HUKUHARA DIFERENSIAL DAN INKLUSI DIFERENSIAL
FUZZY DENGAN MENGGUNAKAN METODE RUNGE-KUTTA DIPERLUAS**

Oleh

Muhammad Ahsar Karim

Program Studi Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat

Email: m_ahsar@ulm.ac.id

Abstract

Most of the real systems in the world may contain uncertainties, which are possibly due to the limitations of available data, complexity of the network of systems, and environmental or demographic changes at the time of observation. One of the system behaviors that often appears in mathematical modeling is periodic behavior, which often shows complex dynamic behavior, depending on initial values and parameters. By accommodating the uncertainties in the model, in-depth studies are needed to describe mathematical structure, methodology for determining solution, and procedure for estimating parameters. Among the mathematical models that describe periodic behavior is harmonic oscillator equation. In this paper, the model is assumed to have uncertainty in the initial values in the form of fuzzy numbers, which is then called by fuzzy harmonic oscillator equation. The model is examined by comparing three fuzzy differential approaches, namely Hukuhara differential, generalized Hukuhara differential and fuzzy differential inclusions. Applications of fuzzy arithmetic concepts to the models lead to a deterministic alpha-cut systems, which are solved using extended Runge-Kutta method. In contrast to the standard Runge-Kutta method, the extended Runge-Kutta method using the first derivative approximation of the evaluation function to increase the accuracy of the solution. Among the three fuzzy approaches, the fuzzy differential inclusion type is the most appropriate approach to capture the periodic behavior of the equation. Next, it is shown how to estimate the parameters of solution of the fuzzy differential inclusion type and simulation of fuzzy data using lsqnonlin method.

Keywords: Parameter Estimation, Hukuhara Differential, Fuzzy Differential Inclusion, Extended Runge-Kutta Method & Fuzzy Harmonic Oscillator Equation

PENDAHULUAN

Pemodelan matematika adalah salah satu konsep yang sangat penting dan telah diaplikasikan di dalam banyak kasus, seperti studi biologi sistem, biokimia, fisika, prediksi penyakit, maupun masalah dinamikan populasi. Ukuran yang besar dan kompleksitas jaringan seringkali menjadi masalah utama di dalam memahami perilaku dinamis dari sistem. Salah satu perilaku khas yang sering dihadapi adalah perilaku periodik, yang dapat timbul baik dalam bentuk sistem linier maupun nonlinear. Model matematika dari sistem dengan perilaku periodik sering menunjukkan perilaku dinamis yang kompleks, dapat bergantung pada nilai awal atau parameter. Selain itu, di saat melakukan

eksperimen dan pengamatan, peneliti sering berhadapan dengan masalah keterbatasan teknologi yang tersedia, perubahan kondisi lingkungan di luar perkiraan atau masalah demografi. Masalah-masalah ini memberi dampak ketidakpastian di dalam pengukuran atau pengambilan data eksperimen. Untuk tujuan mengungkap perilaku dinamis yang kompleks dan secara bersamaan mengakomodir faktor ketidakpastian dari sistem, dibutuhkan studi intensif dalam hal deskripsi struktur matematika, metodologi untuk menentukan solusi dan prosedur untuk melakukan estimasi parameter.

Untuk mendapatkan wawasan matematis di dalam masalah ini, suatu model matematika yang menggambarkan perilaku periodik diberikan



sebagai subjek studi makalah ini, yaitu persamaan osilator harmonik dengan gaya luar. Pada penelitian sebelumnya, para peneliti (Karim, Gunawan, Apri, & Sidarto, 2017) telah membahas solusi masalah nilai awal *fuzzy* dari suatu model osilator harmonik tanpa gaya luar dengan menggunakan metode Runge-Kutta standar. Pada penelitian ini, model dikembangkan dengan memasukkan faktor gaya luar seperti pada Persamaan (1) dan solusi akan ditentukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta diperluas (Karim & Gunawan, 2020). Model (1) diasumsikan memiliki masalah ketidakpastian di nilai awal, yang dipandang sebagai bilangan *fuzzy*. Hal ini berakibat bahwa solusi model merupakan bilangan *fuzzy*. Model dengan asumsi ini selanjutnya dikenal sebagai persamaan osilator harmonik *fuzzy*.

Suatu konsep yang sangat penting di dalam pemodelan matematika, yang menjelaskan model *fuzzy*, telah diperkenalkan dalam beberapa dekade terakhir, yaitu persamaan diferensial *fuzzy*. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh para peneliti (Chang & Zadeh, 1972), kemudian dikembangkan oleh para peneliti (Bede, 2013) dan (Gomez, Barros, & Bede, 2015) dengan beberapa perluasan, diantaranya adalah: konsep yang didasarkan pada fungsi bernilai interval, yang disebut sebagai diferensial Hukuhara; konsep yang didasarkan pada *alpha-cut*, yang dikenal sebagai diferensial Seikkala, yang kemudian terbukti ekuivalen dengan diferensial Hukuhara dimana turunannya adalah sama; konsep yang diperluas dari diferensial Hukuhara, yang disebut sebagai diferensial Hukuhara tegeneralisasi; dan konsep yang diperluas dari inklusi diferensial, yang dikenal sebagai inklusi diferensial *fuzzy*.

Solusi numerik persamaan diferensial *fuzzy* telah dibahas oleh beberapa peneliti seperti (Jayakumar, Maheskumar, & Kanagarajan, 2012) dan (Ghanaie & Moghadam, 2011) dengan menggunakan metode Runge-Kutta standar pada kasus dengan perilaku linear, eksponensial maupun logistik. Para peneliti (Karim, Gunawan, Apri, & Sidarto, 2018) membahas solusi model Goodwin *fuzzy*, yaitu sistem persamaan dengan

perilaku solusi periodik, dengan menggunakan metode Runge-Kutta standar. Pada makalah ini akan dibahas persamaan osilator harmonik *fuzzy* dengan gaya luar dengan membandingkan tiga tipe diferensial *fuzzy* di atas. Metode aritmetika *fuzzy* akan diaplikasikan untuk mengubah persamaan menjadi sistem baru, yang disebut dengan sistem deterministik *alpha-cut*. Selanjutnya, sistem-sistem yang baru ini akan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta diperluas. Dari solusi-solusi yang diperoleh akan akan dipilih tipe yang dapat menangkap perilaku periodik dari persamaan osilator harmonik *fuzzy*. Pada akhirnya, tipe diferensial *fuzzy* yang tepat akan dipilih untuk melakukan estimasi parameter pada suatu data *fuzzy* simulasi dari solusi eksak persamaan osilator harmonik *fuzzy*. Optimasi untuk estimasi parameter akan dilakukan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil tak linear.

LANDASAN TEORI

Bilangan *Fuzzy*

Bilangan *fuzzy* adalah himpunan *fuzzy* khusus yang pertama kali diperkenalkan oleh peneliti (Zadeh, 1965) dan dibangun berdasarkan beberapa konsep dasar berikut ini.

Definisi 1. Diberikan himpunan tak kosong X , $A \subseteq X$, dan fungsi $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$. Himpunan pasangan terurut $\{(x, \mu_A(x)): x \in X\}$ disebut himpunan *fuzzy* \tilde{A} , μ_A disebut fungsi keanggotaan dari \tilde{A} dan $\mu_A(x)$ disebut derajat keanggotaan x pada \tilde{A} .

Definisi 2. Suatu *alpha-cut* (disingkat dengan α -cut) dari himpunan *fuzzy* \tilde{A} dilambangkan dengan $[\tilde{A}]^\alpha$ dan didefinisikan sebagai $\{x \in X: \mu_A(x) \geq \alpha, \alpha \in [0,1]\}$.

Definisi 3. Himpunan *fuzzy* \tilde{A} pada \mathbb{R} disebut ‘bilangan *fuzzy* \tilde{A} ’ jika:

- [i.] \tilde{A} normal, yaitu terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\mu_A(x) = 1$.
- [ii.] \tilde{A} terdukung secara kompak, yaitu *closure* dari $\text{Supp}(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{R}: \mu_A(x) > 0\}$ terbatas.
- [iii.] \tilde{A} semi-kontinu atas, yaitu $[\tilde{A}]^\alpha$ tertutup untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.



- [iv.] \tilde{A} konveks, yaitu untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dan $\alpha \in [0,1]$ berlaku $\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \leq \mu_A(\alpha x + (1 - \alpha)y)$.

Koleksi semua bilangan *fuzzy* disimbolkan dengan $F_{\mathbb{R}}$. Suatu bilangan *fuzzy* $\tilde{A} \in F_{\mathbb{R}}$ mengarah ke fungsi keanggotaan μ_A dari himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. Dengan demikian, setiap *singleton* $R = \{r\}$ di \mathbb{R} merupakan bilangan *fuzzy* \tilde{R} dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_R(x) = \begin{cases} 1 & ; x = r \\ 0 & ; x \neq r \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan ini biasa disebut fungsi karakteristik dan disimbolkan dengan $\kappa_{\mathbb{R}}$.

Ada beberapa fungsi keanggotaan yang umum digunakan dalam praktek, diantaranya adalah fungsi segitiga, fungsi trapesium, fungsi Gaussian dan fungsi sigmoidal. Fungsi keanggotaan yang paling sering digunakan untuk mewakili bilangan *fuzzy* adalah bentuk segitiga, yang biasa disebut fungsi keanggotaan segitiga (*triangular membership function*) dan dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_{Tri(a,b,c)}(x) = F(x; (a, b, c)) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ (x - a)/(b - a) & ; a \leq x < b \\ (c - x)/(c - b) & ; b \leq x < c \\ 0 & ; x \geq c \end{cases}$$

untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$, dengan $a < b < c$.

Definisi 4. (Operasi Aritmetika pada α -Cut Bilangan *Fuzzy*) Diberikan $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_{\mathbb{R}}$ dengan $[\tilde{A}]^\alpha = [A_\alpha^-, A_\alpha^+]$ dan $[\tilde{B}]^\alpha = [B_\alpha^-, B_\alpha^+]$, dengan $A_\alpha^-, A_\alpha^+, B_\alpha^-, B_\alpha^+ \in \mathbb{R}$.

- [i.] α -cut dari jumlah dan selisih \tilde{A} dan \tilde{B} berturut-turut dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} [\tilde{A} + \tilde{B}]^\alpha &= [\tilde{A}]^\alpha + [\tilde{B}]^\alpha \\ &= [A_\alpha^- + B_\alpha^-, A_\alpha^+ + B_\alpha^+] \\ [\tilde{A} - \tilde{B}]^\alpha &= [\tilde{A}]^\alpha - [\tilde{B}]^\alpha \\ &= [A_\alpha^- - B_\alpha^+, A_\alpha^+ - B_\alpha^-] \end{aligned}$$

- [ii.] α -cut dari perkalian suatu konstanta $\delta \in \mathbb{R}$ dengan \tilde{A} dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} [\delta \times \tilde{A}]^\alpha &= \delta \times [\tilde{A}]^\alpha = \delta \times [A_\alpha^-, A_\alpha^+] \\ &= \begin{cases} [\delta A_\alpha^-, \delta A_\alpha^+] & ; \delta \geq 0 \\ [\delta A_\alpha^+, \delta A_\alpha^-] & ; \delta < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- [iii.] α -cut dari perkalian \tilde{A} dengan \tilde{B} dinyatakan sebagai:

$$[\tilde{A} \times \tilde{B}]^\alpha = [\tilde{A}]^\alpha \times [\tilde{B}]^\alpha = [\min P, \max P],$$

dengan $P = \{A_\alpha^- B_\alpha^-, A_\alpha^- B_\alpha^+, A_\alpha^+ B_\alpha^-, A_\alpha^+ B_\alpha^+\}$.

- [iv.] α -cut dari pembagian \tilde{A} dengan \tilde{B} , jika $0 \notin \text{Supp}(\tilde{B})$ dinyatakan sebagai:

$$[\tilde{A}/\tilde{B}]^\alpha = [\tilde{A}]^\alpha / [\tilde{B}]^\alpha = [A_\alpha^-, A_\alpha^+][1/B_\alpha^+, 1/B_\alpha^-].$$

Persamaan Diferensial *Fuzzy*

Beberapa konsep dasar penting yang digunakan dalam pembahasan persamaan differensial *fuzzy* adalah selisih *fuzzy* dan fungsi *fuzzy* [1, 2 dan 8]. Konsep-konsep utama adalah diferensial Seikkala, diferensial Hukuhara dan generalisasinya, serta inklusi diferensial *fuzzy* yang diberikan berikut ini.

1. Diferensial Hukuhara

Diferensial Hukuhara dan generalisasinya memiliki ekuivalensi dengan konsep diferensial Seikkala. Definisi masing-masing diberikan sebagai berikut.

Definisi 5. Diberikan fungsi $F: (a, b) \rightarrow F_{\mathbb{R}}$. Jika

$$[(F_\alpha^-)'(x_0), (F_\alpha^+)'(x_0)],$$

untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ ada dan mendefinisikan α -cut dari bilangan *fuzzy* $F'_s(x_0)$, maka F dikatakan terdiferensial-S (*Seikkala differentiable*) di x_0 dan $F'_s(x_0)$ disebut derivatif-S (*Seikkala derivative*) dari F di x_0 .

Definisi 6. Diberikan fungsi $F: (a, b) \rightarrow F_{\mathbb{R}^n}$, dengan $F_{\mathbb{R}^n}$ menyatakan koleksi bilangan *fuzzy* pada \mathbb{R}^n . Jika limit dari pasangan

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0+h) -_H F(x_0)}{h} \text{ dan } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x_0) -_H F(x_0-h)}{h}$$

ada dan sama dengan $F'_H(x_0) \in F_{\mathbb{R}^n}$, maka F dikatakan terdiferensial-H (*Hukuhara differentiable*) di x_0 dan $F'_H(x_0)$ disebut derivatif-H (*Hukuhara derivative*) dari F di x_0 .

Suatu fungsi *fuzzy* yang terdiferensial-H mempunyai α -cut yang juga terdiferensial-H, yaitu suatu fungsi terdiferensial-H bernilai interval. Misalkan $F: (a, b) \rightarrow F_{\mathbb{R}}$ terdiferensial-H, maka $(F_\alpha^-)'(x)$ dan $(F_\alpha^+)'(x)$ masing-masing terdiferensialkan dan



$$[F'(x)]^\alpha = [(F_\alpha^-)'(x), (F_\alpha^+)'(x)].$$

Hal ini berarti bahwa, jika F terdiferensial-H, maka F terdiferensial-S dan derivatif dari keduanya sama.

Teorema 1. Diberikan fungsi $F, G: [a, b] \rightarrow F_{\mathbb{R}^n}$. Jika F dan G masing-masing terdiferensial-H, maka keduanya kontinu dan untuk setiap $\delta \in \mathbb{R}$ berlaku

$$(F + G)'_H = F'_H + G'_H \text{ dan } (\delta F)'_H = \delta F'_H.$$

Jika F terdiferensial-S (atau terdiferensial-H), maka $\Delta_{[F(x)]^\alpha} = F_\alpha^+(x) - F_\alpha^-(x)$ tidak turun pada $[a, b]$. Hal ini berarti bahwa, ketidakpastian fungsi F tidak turun. Dengan kata lain, suatu fungsi terdiferensial-H tidak dapat menghasilkan fungsi dengan ketidakpastian yang menurun atau periodik. Untuk mengatasi masalah ini, maka diberikan perumuman dari konsep keterdiferensialan Hukuhara yang dapat mendefinisikan lebih banyak kasus fungsi bernilai bilangan fuzzy, dengan sifat, jika suatu fungsi terdiferensial-H, maka fungsi tersebut terdiferensialkan pada perumuman keterdiferensialan Hukuhara dan nilainya sama.

Definisi 7. Diberikan fungsi $F: (a, b) \rightarrow F_{\mathbb{R}^n}$. Jika limit dari pasangan:

$$\begin{aligned} \text{[i.]} \quad & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0+h) - {}_H F(x_0)}{h} \quad \text{dan} \\ & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0) - {}_H F(x_0-h)}{h} \quad \text{atau} \\ \text{[ii.]} \quad & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0) - {}_H F(x_0+h)}{-h} \quad \text{dan} \\ & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0-h) - {}_H F(x_0)}{-h} \end{aligned}$$

ada dan sama dengan suatu $F'_{gH}(x_0) \in F_{\mathbb{R}^n}$, maka F dikatakan *strongly generalized differentiable* di x_0 and $F'_{gH}(x_0)$ disebut *strongly generalized derivative* dari F di x_0 .

Pada Definisi 6 dan 7, tanda ‘ $-_H$ ’ menyatakan selisih Hukuhara (disingkat dengan “selisih-H”) dengan aturan:

$$\tilde{A} -_H \tilde{B} = \tilde{C} \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B} + \tilde{C},$$

jika \tilde{C} ada, untuk setiap $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in F_{\mathbb{R}^n}$ dan tanda ‘ $+$ ’ menyatakan operasi penjumlahan standar pada bilangan fuzzy. Jika digunakan \tilde{A} dan \tilde{B} pada Definisi 4, maka selisih-H $\tilde{A} -_H \tilde{B}$ dalam bentuk α -cut setara dengan:

$$[\tilde{A} -_H \tilde{B}]^\alpha = [A_\alpha^- - B_\alpha^-, A_\alpha^+ - B_\alpha^+].$$

Fungsi F pada Definisi 7 [i] memenuhi Definisi 6 sehingga F terdiferensial-H. Fungsi F yang memenuhi Definisi 7 [ii] selanjutnya disebut terdiferensial-gH dan $F'_{gH}(x_0)$ disebut derivatif-gH. Berbeda dengan keterdiferensialan-H, fungsi F yang terdiferensial-gH menghasilkan diameter $\Delta_{[F(x)]^\alpha} = F_\alpha^+(x) - F_\alpha^-(x)$ yang tidak meningkat. Namun, dari kedua konsep keterdiferensialan ini terdapat ekuivalensi bahwa, jika F terdiferensial-H, maka F terdiferensial-gH.

Teorema 2. Jika diberikan fungsi $F: (a, b) \rightarrow F_{\mathbb{R}}$ dan $[F(x)]^\alpha = [F_\alpha^-(x), F_\alpha^+(x)]$, untuk setiap $x \in (a, b)$ dan $\alpha \in [0, 1]$, maka berlaku:

- [i.] Jika F terdiferensial-H, maka $[F'(x)]^\alpha = [(F_\alpha^-)'(x), (F_\alpha^+)'(x)]$.
- [ii.] Jika F terdiferensial-gH, maka $[F'(x)]^\alpha = [(F_\alpha^+)'(x), (F_\alpha^-)'(x)]$.

2. Inklusi Diferensial Fuzzy

Teori inklusi diferensial (*differential inclusions*) dikembangkan untuk menangani masalah ketidakpastian yang tidak dapat dijelaskan dalam sistem dinamik klasik (*tegas/crisp*). Ketidakpastian tersebut dapat disebabkan oleh pemahaman parsial yang muncul dari ketidakmungkinan untuk mendapatkan pemahaman yang menyeluruh terhadap fenomena atau ketidaktahuan perilaku yang terkait dengan suatu sistem. Secara umum, teori inklusi diferensial dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{cases} X'(t) \in F(t, X(t)), \\ X(0) \in \Gamma \end{cases}$$

dengan $F: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, dan $P(\mathbb{R}^n)$ menyatakan himpunan kuasa dari \mathbb{R}^n . Solusinya adalah fungsi kontinu yang memenuhi inklusi pada Persamaan (1) dan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan diferensial

$$X'(t) = f(t, X(t)), X(0) = X_0 \in \Gamma;$$

dengan f adalah suatu fungsi dari F .

Teori inklusi diferensial fuzzy (*fuzzy differential inclusions*, disingkat FDI) adalah generalisasi dari inklusi diferensial dan pertama kali diperkenalkan oleh peneliti (Aubin, 1990) dan peneliti (Baidosov, 1990). Inklusi diferensial



fuzzy dalam bentuk α -cut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{cases} X'(t) \in [F(t, \tilde{X}(t))]^\alpha; \\ X(0) \in [\tilde{X}_0]^\alpha \end{cases};$$

untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, dengan $[F]^\alpha: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}_F^n$ dan $[\tilde{X}_0]^\alpha \in \mathcal{F}_F^n$. Himpunan \mathcal{F}_F^n menyatakan keluarga himpunan tidak kosong, kompak dan konveks pada \mathbb{R}^n .

Solusi Masalah (3) adalah suatu fungsi kontinu mutlak $X: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ yang memenuhi Masalah (2), untuk suatu fungsi f pada $[0, T]$ dan $X_0 \in [\tilde{X}_0]^\alpha$. Gomez dkk (2015) menjamin bahwa, jika F kontinu dan terbatas, maka himpunan semua solusi inklusi diferensial fuzzy dari F ada, misalkan $\sum_\alpha(X_0, T)$, dan merupakan α -cut dari solusi fuzzy Persamaan (3).

Metode Runge-Kutta Diperluas

Diberikan persamaan diferensial biasa:

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Bentuk umum dari fungsi utama metode Runge-Kutta standar untuk Masalah (4) adalah:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n)h,$$

dengan fungsi evaluasi k_i :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h), \\ k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h), \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{(n-1)1}k_1h + \\ &\quad q_{(n-1)2}k_2h + \dots + q_{(n-1)(n-1)}k_{n-1}h). \end{aligned}$$

Sedangkan bentuk umum dari fungsi utama metode Runge-Kutta diperluas untuk Masalah (5):

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m (hb_i k_{i1} + h^2 c_i k_{i2}),$$

dengan fungsi evaluasi:

$$\begin{aligned} k_{i1} &= f(x_n + \bar{c}_i h, y_n + h \sum_{s=1}^{i-1} a_{is} k_{s1}), \\ k_{i2} &= f'(x_n + \bar{c}_i h, y_n + h \sum_{s=1}^{i-1} a_{is} k_{s1}). \end{aligned}$$

Nilai konstanta $a_i, p_i, q_{ii} \in \mathbb{R}$ pada Persamaan (5) dan $b_i, c_i, \bar{c}_i, a_{is} \in \mathbb{R}$ pada Persamaan (6) dapat ditentukan menggunakan tabel Butcher.

Metode Kuadrat Terkecil Tak Linear.

Metode kuadrat terkecil tak linear (*nonlinear least-squares*, disingkat *lsqnonlin*)

adalah suatu bentuk analisis kuadrat terkecil yang digunakan untuk menyesuaikan suatu set dari m pengamatan dengan model yang tak linear dalam n parameter yang tidak diketahui ($m > n$). Tujuan utama dari metode ini adalah memperbaiki set parameter dengan iterasi yang berurutan. Set parameter terbaik dapat didasarkan pada asumsi kriteria henti (*stopping criteria*), yaitu suatu keadaan dimana jumlah kuadrat tidak berkurang dari satu iterasi ke iterasi berikutnya. Kriteria henti yang akan digunakan dalam kajian ini adalah:

$$\left| \frac{S^k - S^{k+1}}{S^k} \right| < 10^{-6}.$$

Misal diberikan suatu set data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ dan fungsi $y = f(x, \beta)$, dimana selain terhadap variabel x , fungsi juga bergantung pada parameter $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, dengan $m \geq n$. Hal ini bertujuan untuk menemukan vektor β dari parameter sedemikian rupa sehingga diperoleh kurva yang paling sesuai dengan data yang diberikan dalam kuadrat terkecil, yaitu dengan meminimumkan jumlah kuadrat

$$S = \sum_{i=1}^m r_i^2,$$

dimana residu r_i diberikan oleh $r_i = y_i - f(x_i, \beta)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Nilai minimum dari S diperoleh ketika gradiennya bernilai nol.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Osilator Harmonik Fuzzy.

Persamaan osilator harmonik dengan gaya luar dinyatakan sebagai berikut:

$$y'' + y = \omega \sin(\beta t),$$

dengan y menyatakan variabel koordinat posisi yang merupakan fungsi terhadap waktu t , ω menyatakan amplitudo fungsi gelombang dan β menyatakan kecepatan sudut. Jika $y = y_1$ dan $y'_1 = y_2$, maka Persamaan (7) dapat dinyatakan dalam bentuk masalah nilai awal:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2, & y_1(0) &= y_{1,0}, \\ y'_2 &= -y_1 + \omega \sin(\beta t), & y_2(0) &= y_{2,0}, \end{aligned}$$

dengan $y_{1,0}, y_{2,0} \in \mathbb{R}$.

Diberikan himpunan tak kosong $X \subseteq \mathbb{R}$ dan bilangan fuzzy $F \in F_{\mathbb{R}}$. Jika nilai awal pada Persamaan (8) diperluas menjadi $\tilde{y}_{1,0}, \tilde{y}_{2,0} \in F_{\mathbb{R}}$,



maka solusi masalah tersebut harus merupakan bilangan-bilangan *fuzzy*, misalkan $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in F_{\mathbb{R}}$. Misalkan:

$$[\tilde{y}_{1,0}]^\alpha = [y_{1,0}^-, y_{1,0}^+], \quad [\tilde{y}_{2,0}]^\alpha = [y_{2,0}^-, y_{2,0}^+]$$

$$[\tilde{y}_1]^\alpha = [y_{1,\alpha}^-, y_{1,\alpha}^+], \quad [\tilde{y}_2]^\alpha = [y_{2,\alpha}^-, y_{2,\alpha}^+]$$

Dengan menggunakan Persamaan (9) diperoleh bentuk α -cut Persamaan (8) sebagai berikut:

$$[y_{1,\alpha}^-, y_{1,\alpha}^+]' = [y_{2,\alpha}^-, y_{2,\alpha}^+]$$

$[y_{2,\alpha}^-, y_{2,\alpha}^+]' = -[y_{1,\alpha}^-, y_{1,\alpha}^+] + [\omega \sin(\beta t)]$, ω si dengan nilai awal $[y_{1,0}^-, y_{1,0}^+]$ dan $[y_{2,0}^-, y_{2,0}^+]$.

Dari Persamaan (10) diperoleh sistem deterministik α -cut berikut ini:

(i) Dengan menggunakan konsep diferensial Hukuhara:

$$(y_{1,\alpha}^-)' = y_{2,\alpha}^-$$

$$(y_{1,\alpha}^+)' = y_{2,\alpha}^+$$

$$(y_{2,\alpha}^-)' = -y_{1,\alpha}^+ + \omega \sin(\beta t)$$

$$(y_{2,\alpha}^+)' = -y_{1,\alpha}^- + \omega \sin(\beta t)$$

dengan nilai awal $y_{1,0}^-, y_{1,0}^+, y_{2,0}^-, y_{2,0}^+ \in \mathbb{R}$.

(ii) Dengan menggunakan konsep diferensial Hukuhara tergeneralisasi:

$$(y_{1,\alpha}^-)' = y_{2,\alpha}^+$$

$$(y_{1,\alpha}^+)' = y_{2,\alpha}^-$$

$$(y_{2,\alpha}^-)' = -y_{1,\alpha}^- + \omega \sin(\beta t)$$

$$(y_{2,\alpha}^+)' = -y_{1,\alpha}^+ + \omega \sin(\beta t)$$

dengan nilai awal $y_{1,0}^-, y_{1,0}^+, y_{2,0}^-, y_{2,0}^+ \in \mathbb{R}$.

(iii) Dengan menggunakan konsep inklusi diferensial *fuzzy*, maka solusi *fuzzy* dari Masalah (10) adalah keluarga inklusi diferensial dari persamaan:

$$y_1' \in [y_{2,\alpha}^-, y_{2,\alpha}^+]$$

$y_2' \in [-y_{1,\alpha}^+ + \omega \sin(\beta t), -y_{1,\alpha}^- + \omega \sin(\beta t)]$ dengan nilai awal $y_{1,0} \in [y_{1,0}^-, y_{1,0}^+]$ dan $y_{2,0} \in [y_{2,0}^-, y_{2,0}^+]$,

serta dengan $[y_{1,\alpha}^-, y_{1,\alpha}^+] = [\min\{y_1\}, \max\{y_1\}]$ dan $[y_{2,\alpha}^-, y_{2,\alpha}^+] = [\min\{y_2\}, \max\{y_2\}]$.

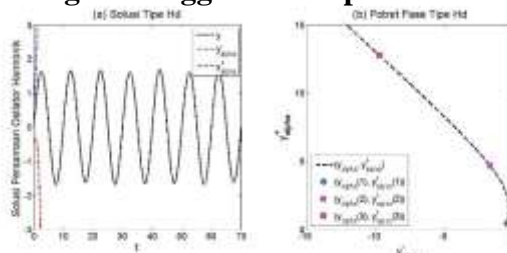
Solusi Model Osilator Harmonik *Fuzzy*.

Sebagai ilustrasi dalam masalah ini, diberikan $\omega = 1$ dan $\beta = \pi/5$ serta nilai awal bilangan *fuzzy* segitiga: $\tilde{y}_1(0) = \tilde{0}$ dan $\tilde{y}_2(0) = \tilde{1}$. Dalam bentuk α -cut dapat dinyatakan sebagai:

$$[y_{1,0}^-, y_{1,0}^+] = [-0.5, 0.5] \text{ dan } [y_{2,0}^-, y_{2,0}^+] = [0.5, 1.5].$$

Grafik solusi Persamaan (11), (12) dan (13) dengan menggunakan metode Runge-Kutta diperluas, secara berturut-turut diberikan pada Gambar 1, 2, dan 3.

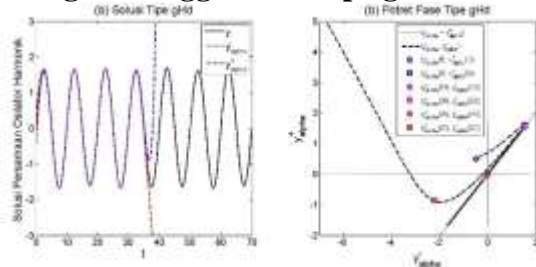
Gambar 1. Solusi model osilator harmonik *fuzzy* dengan menggunakan tipe Hd



Gambar 1 menunjukkan Solusi model osilator harmonik *fuzzy* dengan menggunakan tipe Hd. Pada Gambar 1 (a), garis putus-putus berwarna merah menyatakan y_α^- dan garis putus-putus berwarna biru menyatakan y_α^+ , yang secara berturut-turut adalah $y_{1,\alpha}^-$ dan $y_{1,\alpha}^+$ pada Persamaan (11). Lebar α -cut $[y_\alpha^-, y_\alpha^+] = [\tilde{y}]^\alpha$ disebut sebagai ketidakpastian solusi *fuzzy* dari \tilde{y} selama evolusi t . Dari Gambar 1 (b), perubahan ketidakpastian \tilde{y} diketahui meningkat sangat cepat, dimana masing-masing y_α^- turun dan y_α^+ naik dengan pesat. Hal ini berarti bahwa solusi dari tipe diferensial Hukuhara tidak dapat menangkap perilaku osilasi dari persamaan osilator harmonik *fuzzy*, bahkan sejak awal di sepanjang evolusi t .

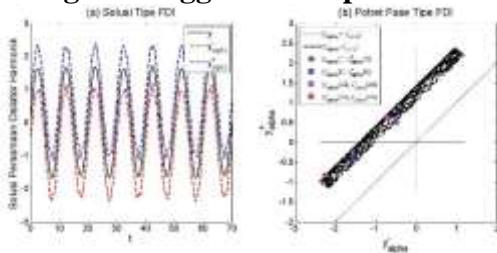


Gambar 2. Solusi model osilator harmonik fuzzy dengan menggunakan tipe gHd



Pada Gambar 2, bagian (a) memperlihatkan bahwa solusi model osilator harmonik fuzzy dengan menggunakan tipe gHd pada Persamaan (12) dapat menangkap perilaku osilasi dari model dalam beberapa periode. Akan tetapi, dari bagian (b) dapat diketahui bahwa terdapat beberapa titik potong antara y_{α}^{-} dan y_{α}^{+} , biasa disebut *switch point*, yaitu di saat kedua kurva tepat berada pada garis berwarna biru $y_{\alpha}^{-} = y_{\alpha}^{+}$. Dengan demikian, ketidakpastian $[\tilde{y}]^{\alpha}$ berakhir pada *switch point* pertama di koordinat (18,125; -1,5058). Hal ini berarti bahwa solusi dari tipe diferensial Hukuhara tergeneralisasi juga tidak dapat menangkap perilaku osilasi dari persamaan osilator harmonik fuzzy sepanjang evolusi t .

Gambar 3. Solusi model osilator harmonik fuzzy dengan menggunakan tipe FDI



Berbeda dengan tipe Hd dan gHd, solusi Persamaan (13) dengan tipe FDI yang ditunjukkan pada Gambar 3 (a) dapat menangkap perilaku osilasi persamaan osilator harmonik fuzzy di sepanjang evolusi t . Dari Gambar 3 (b) dapat diketahui bahwa y_{α}^{-} dan y_{α}^{+} masing-masing beresilasi dan tidak berpotongan, dimana kedua kurva tidak pernah melalui garis berwarna biru, yaitu persamaan $y_{\alpha}^{-} = y_{\alpha}^{+}$. Ini berarti bahwa ketidakpastian $[\tilde{y}]^{\alpha}$ dari tipe FDI dapat menangkap perilaku osilasi dari persamaan osilator harmonik fuzzy.

3.1. Estimasi parameter

Diantara ketiga tipe diferensial fuzzy tersebut, metode FDI adalah tipe yang paling tepat untuk menangkap perilaku osilasi dari persamaan osilator harmonik fuzzy. Tipe ini selanjutnya dipilih untuk melakukan estimasi parameter terhadap suatu data simulasi fuzzy.

Misalkan $[\tilde{y}_{data}]^{\alpha} = [y_{data_{\alpha}^{-}}, y_{data_{\alpha}^{+}}]$ adalah data fuzzy yang disimulasikan dari solusi eksak Model (8) dan disajikan pada Gambar 4 (a). Kurva y ditandai dengan garis putus-putus berwarna hitam, $y_{data_{\alpha}^{-}}$ ditandai dengan “⊖” berwarna merah dan $y_{data_{\alpha}^{+}}$ dengan “⊕” berwarna biru.

Optimasi untuk penaksiran parameter dilakukan dengan menggunakan metode *lsqnonlin*. Fungsi obyektif dibentuk dari solusi tipe FDI pada Persamaan (13) dan data fuzzy yang diberikan. Fungsi tersebut diberikan sebagai berikut:

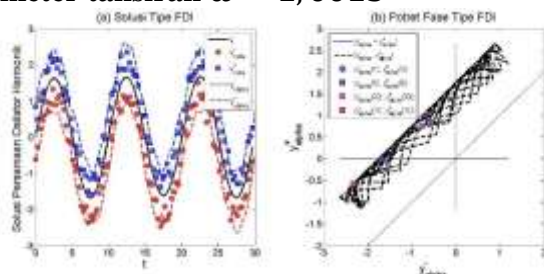
$$\begin{aligned} \min_{\omega} \|f(\omega)\|_2^2 &= \min_{\omega} \frac{1}{2N} \left(\sum_{t=0}^{N-1} (y_{\alpha}^{-}(t) - y_{data_{\alpha}^{-}}(t))^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=0}^{N-1} (y_{\alpha}^{+}(t) - y_{data_{\alpha}^{+}}(t))^2 \right) \end{aligned}$$

dimana f adalah fungsi dalam variabel ω , ω adalah parameter yang akan ditaksir, dan N menyatakan banyaknya data.

Parameter ω ditaksir pada interval (0,2] dengan menggunakan parameter awal $\omega_0 = 1$. Melalui proses numerik diperoleh parameter $\omega = 1,0015$ dan grafik solusi dari Persamaan (13) dengan menggunakan parameter hasil taksiran diberikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Solusi model osilator harmonik fuzzy dengan menggunakan tipe FDI dan parameter taksiran $\omega = 1,0015$



Pada Gambar 4 (a), ketidakpastian $[y_{\alpha}^{-}, y_{\alpha}^{+}]$ dapat menangkap perilaku osilasi persamaan osilator harmonik, yaitu $y_{\alpha}^{-} < y < y_{\alpha}^{+}$ di sepanjang evolusi t . Kurva y_{α}^{-} dan y_{α}^{+} masing-masing berosilasi dan tidak berpotongan, dimana kedua kurva tidak pernah melalui garis berwarna biru, yaitu $y_{\alpha}^{-} = y_{\alpha}^{+}$ pada Gambar 4 (b). Pada bagian ini juga diperoleh informasi bahwa ketidakpastian solusi persamaan osilator harmonik fuzzy berosilasi di sepanjang evolusi t .

PENUTUP

Kesimpulan

Konsep inklusi diferensial fuzzy adalah satu-satunya diantara tiga tipe diferensial fuzzy yang dapat menangkap perilaku osilasi dan menjaga ketidakpastian solusi dari model osilator harmonik fuzzy. Dari solusi tipe inklusi diferensial fuzzy dan data fuzzy simulasi, dengan menggunakan metode *lsqnonlin* diperoleh parameter amplitudo fungsi gelombang, yaitu $\omega = 1,0015$. Dengan menggunakan parameter tersebut, solusi dari tipe inklusi diferensial fuzzy yang ditentukan dengan metode Runge-Kutta diperluas menunjukkan bahwa interval ketidakpastian solusi dapat menangkap perilaku osilasi model di sepanjang evolusi waktu yang diberikan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Aubin, J. P. (1990). Fuzzy differential inclusions. *Probl. Control Inf. Theory*, 19 (1), Hal. 55-67.
- [2] Baidosov, V. A. (1990). Fuzzy differential inclusions, *PMM USSR*, 54 (1), Hal. 8-13.
- [3] Bede, B. (2013). *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Springer.
- [4] Chang, S. L. and Zadeh, L. A. (1972). On Fuzzy Mapping and Control. *IEEE Trans, Systems Man Cybernet*, 2, Hal. 30-34,. Doi: 10.1109/TSMC.1972.5408553.
- [5] Ghanaie, Z. A. dan Moghadam, M. M. (2011). Solving Fuzzy Differential Equations by Runge-Kutta Method. *The Journal of Mathematics and Computer Sciences*, 2 (2), Hal. 208-221.
- [6] Gomez, L. T., Barros, L. C., dan Bede, B. (2015). *Fuzzy Differential Equations in Various Approaches*, Springer.
- [7] Jayakumar, T., Mahes Kumar, D., dan Kanagarajan, K. (2012). Numerical Solution of Fuzzy Differential Equations by Runge-Kutta Method of Order Five. *Applied Mathematical Sciences*, 6 (60), Hal. 2989-3002.
- [8] Karim, M. A., Gunawan, A. Y., Apri, M., dan Sidarto, K. A. (2017). Solving a Fuzzy Initial Value Problem Of a Harmonic Oscillator Model. *AIP Conference Proceedings 1825*, 020011 2017. Doi: 10.1063/1.4978980.
- [9] Karim, M. A., Gunawan, A. Y., Apri, M., dan Sidarto, K. A. (2018). Solving a Parameter Estimation Problem of Goodwin Model with Fuzzy Initial Values. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 107 (2), Hal. 321-338.
- [10] Karim, M. A. dan Gunawan, A. Y. (2020). Parameter Estimations of Fuzzy Forced Duffing Equation: Numerical Performances by the Extended Runge-Kutta Method. *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2020, Article ID 6179591, 9 pages, <https://doi.org/10.1155/2020/6179591>.



-
- [11] Zadeh, L. A. (1965). Information and Control. *Fuzzy Sets*, 8, Hal. 338-353



HALAMAN INI SENGAJA DIKOSONGKAN